DEVOIR SURVEILLÉ N° 08

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur. Le barème est donné à titre indicatif. Le sujet est composé de plusieurs exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (10 pts)
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[2\,;\,8]$ par :

$$f(x) = \frac{-x^2+10x-16}{x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans un repère.

1. Montrer que pour tout réel de l'intervalle $[2\,;\,8]$, on a :

$$f'(x) = \frac{-10x+32}{x^3}$$

2. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2\,;\,8]$.

b. En déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[2;8]$.

3. On appelle f'' la dérivée seconde de f sur $[2\,;\,8]$.
On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[2\,;\,8]$, on a :

$$f''(x) = \frac{20x-96}{x^4}$$

a. Montrer que f est une fonction convexe sur $[4,8\,;\,8]$.

b. Montrer que le point de (C) d'abscisse $4,8$ est un point d'inflexion.

4. On considère la fonction F définie sur $[2\,;\,8]$ par :

$$F(x) = -x+10\ln x+\frac{16}{x}$$

a. Montrer que F est une primitive de f sur $[2\,;\,8]$.

b. Calculer $I = \int_2^8 f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 2 (10 pts)

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-contre, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2. **a.** Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule B3 de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de (u_n) dans la colonne B ?

b. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n \leqslant u_n \leqslant n+1$.

b. En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite (u_n).

c. Démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

4. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n,on a : $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice 1 (10 pts)

1. On note que la fonction f est du type $\frac{u}{v}$, la dérivée est donc $\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$.
$f'(x) = \frac{(-2x+10)\times x^2 - (-x^2+10x-16)\times 2x}{(x^2)^2} = \frac{-2x^3+10x^2+2x^3-20x^2+32x}{x^4}$
donc $f'(x) = \frac{-10x^2+32x}{x^4} = \frac{x\times(-10x+32)}{x\times x^3} = \frac{-10x+32}{x^3}$
donc $\boxed{f'(x) = \frac{-10x+32}{x^3}}$.

2. **a.** Sur $[2 ; 8]$, $x^3 > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-10x+32$ d'où le signe de $f'(x)$, en notant que le signe de $a = -10 < 0$.

x	2		3,2		8
$f'(x)$		+	0	−	

b. D'où le tableau de variation de la fonction f.

x	2		3,2		8
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	0,5625	↘	0

3. **a.** $f''(x) = \frac{20x-96}{x^4}$, notons que $x^4 > 0$ sur $[2 ; 8]$ donc f'' est du signe de $20x-96$ (qui s'annule pour 4,8) donc on peut dresser le tableau de variation de la fonction f' sur $[2 ; 8]$.

x	2		4,8		8
f''		−	0	+	
f'		↘		↗	

La fonction f' est croissante sur $[4,8 ; 8]$ donc la fonction f est convexe sur $[4,8 ; 8]$.

b. La fonction f' est décroissante sur $[2 ; 4,8]$ puis croissante sur $[4,8 ; 8]$ donc la fonction f est concave sur $[2 ; 4,8]$ puis convexe sur $[4,8 ; 8]$ donc le point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse 4,8 est un point d'inflexion.

4. **a.** $F'(x) = -1 + 10\times\frac{1}{x} + 16\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -1 + \frac{10}{x} - \frac{16}{x^2} = \frac{-x^2+10x-16}{x^2}$ donc $\boxed{F'(x) = f(x)}$ donc la fonction F est une primitive de f sur $[2 ; 8]$.

b. $I = \int_2^8 f(x)\,dx = [F(x)]_2^8 = F(8) - F(2) = -8 + 10\ln 8 + 2 - (-2 + 10\ln 2 + 8)$
$I = -8+10\ln 8+2+2-10\ln 2-8 = -12+10\ln 8-10\ln 2$ donc $\boxed{I = -12 + 10\ln 4 \approx 1,86}$.

Exercice 2 (10 pts)

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1 \end{cases}$$

1°) $u_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} + \frac{4}{4} = \frac{7}{4}$

$u_2 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{21}{16} + \frac{4}{16} + \frac{16}{16} = \frac{41}{16}$

2°a) $= (3/4)*B2 + (1/4)*A2 + 1$

2°b) La suite (u_n) semble croissante.

3°a) Mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq u_n \leq n+1$ (P_n)

(I) Pour $n = 0$, $u_0 = 1$, et $0 \leq 1 \leq 1$, (P_0) vraie.

(H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tq (P_n) vraie.

$$n \leq u_n \leq n+1$$

$$\frac{3}{4} n \leq \frac{3}{4} u_n \leq \frac{3}{4}(n+1)$$

$$\underbrace{\frac{3}{4} n + \frac{1}{4} n}_{n} \leq \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n \leq \frac{3}{4} n + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} n$$

$$n + 1 \leq \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n + 1 \leq \frac{3}{4} + n + 1$$

$$n+1 \leq u_{n+1} \leq n + 1 + \frac{3}{4} \leq n+2$$

Donc par transitivité $n+1 \leq u_{n+1} \leq n+2$, i.e. (P_{n+1}) vraie.

(C) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq u_n \leq n+1$.

3°b) . <u>sens de variation</u> $\forall n \in \mathbb{N}$, $\underbrace{u_n \leq n+1}_{(P_n)} \underbrace{\leq u_{n+1}}_{(P_{n+1})}$,

donc par transitivité $u_n \leq u_{n+1}$,

la suite est <u>croissante</u>.

. <u>limite</u> : $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$ (3°a)

donc par minoration $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$.

3°c) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leq u_n \leq n+1$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+1}{n}$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$.

Or par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, donc d'après le théorème des <u>gendarmes</u>, $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n} = 1}$

4°) (v_n) $\begin{cases} v_0 = u_0 - 0 = 1 \\ v_n = u_n - n \end{cases}$

4°a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$

$$= \frac{3}{4} u_n + \frac{1}{4} n + \cancel{1} - n - \cancel{1}$$

$$= \frac{3}{4} u_n - \frac{3}{4} n$$

$$= \frac{3}{4} (u_n - n)$$

$$= \frac{3}{4} v_n.$$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\left(\frac{3}{4}\right)$ et de premier terme 1.

4°b) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$

(ce qui confirme que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$).